06/11/2018

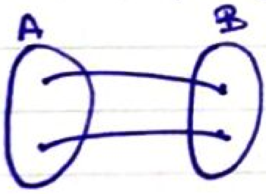
Σύνθεση Σχέσεων.

Αν $\sigma \subseteq A\times B$, $r \subseteq \Gamma\times\Delta$ δύο σχέσεις τότε η σύνθεση των σ, r είναι η σχέση $r\circ\sigma = \{(x,y)\in A\times\Delta \mid \exists z\in B\cap\Gamma : x\sigma z \wedge z r y\}$

$(x,z)\in\sigma \quad (z,y)\in r$

Παράδειγμα. Έστω $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$
$B=\{\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta\}$
$\Gamma=\{\eta,\theta,\iota,\kappa\}$
$\Delta=\{\lambda,\mu,\nu,\xi\}$

$\sigma=\{(\alpha,\varepsilon),(\beta,\zeta),(\beta,\theta),(\gamma,\eta)\}$
$r=\{(\theta,\lambda),(\theta,\xi),(\iota,\nu),(\kappa,\xi)\}$



Απόδειξη:
$(y,x)\in(r\circ\sigma)^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in r\circ\sigma$
$\Leftrightarrow \exists z\in B\cap\Gamma \quad (z,x)\in\sigma^{-1}$
$\Leftrightarrow \exists z\in B\cap\Gamma \quad (y,z)\in r^{-1}$ και $(z,x)\in\sigma^{-1}$
$\Leftrightarrow (y,x)\in\sigma^{-1}\circ r^{-1}$

Πρόταση: Αν $\sigma\subseteq A\times B$ και $r\subseteq\Gamma\times\Delta$ δύο σχέσεις τότε $(r\circ\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\circ r^{-1}$

Διμελείς Σχέσεις: Διμελής σχέση σε ένα σύνολο E ονομάζεται κάθε σχέση $\sigma\subseteq E\times E$.

Ορισμοί: Μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο E καλείται
(α) Αυτοπαθής (ή ανακλαστική) αν για κάθε $x\in E$ ισχύει $x\sigma x$
(β) Συμμετρική: Αν για κάθε $x,y\in E$ ισχύει η συνεπαγωγή $x\sigma y \Rightarrow y\sigma x$
(γ) Αντισυμμετρική: Αν για κάθε $x,y\in E$ ισχύει: αν $x\sigma y$ και $y\sigma x$ τότε $x=y$.

(δ) Μεταβατική: Αν για οποιαδήποτε $x,y,z \in E$, αν $x\sigma y$ και $y\sigma z$ τότε $x\sigma z$.

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω $\sigma \subseteq E\times E$ μια διμελής σχέση.

σ αυτοπαθής: $\forall x\in E \; x\sigma x$ $\quad$ σ μη αυτοπαθής: $\exists x\in E \Rightarrow x \not\sigma x$

σ συμμετρική: $\forall x,y\in E \, (x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma x)$ $\quad$ σ μη συμμετρική: $\exists x,y\in E\,(x\sigma y \wedge y \not\sigma$

σ αντισυμμετρική: $\forall x,y\in E$ αν $x\sigma y$ και $y\sigma x \Rightarrow x=y$.

σ μη αντισυμμετρική: $\forall x,y\in E\,(x\sigma y \wedge y\sigma x \wedge x\neq y)$

σ μεταβατική: $\forall x,y,z\in E$ αν $x\sigma y \wedge y\sigma z \Rightarrow x\sigma z$.

σ μη μεταβατική: $\forall x,y,z\in E\,(x\sigma y \wedge y\sigma z \wedge x\not\sigma z)$.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών θεωρούμε τη σχέση σ που ορίζεται ως εξής: $x\sigma y \Leftrightarrow x+y=10$.

Αλλιώς θα μπορούσαμε να πούμε
$\sigma=\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x+y=10\}$

Να εξεταστεί αν είναι αυτοπαθής / συμμετρική / αντισυμ. / μεταβατική.

<u>Απόδειξη:</u> Η σ δεν είναι αυτοπαθής: $3\in\mathbb{Z}$ και $3\not\sigma 3$ διότι:
$3+3\neq 10$

Η σ είναι συμμετρική: Αν $x,y\in\mathbb{Z}$
$x\sigma y \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y+x=10 \Rightarrow y\sigma x$

Η σ δεν είναι αντισυμμετρική: $2+8=10$ άρα $2\sigma 8$.
$8+2=10$ άρα $8\sigma 2$ ενώ $2\neq 8$.

Η σ δεν είναι μεταβατική $2\sigma 8$, $8\sigma 2$ και $2\not\sigma 2$,
διότι $8+2=10$, $2+8=10$, και $2+2\neq 10$.

Πρόταση: Έστω σ μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο Ε τότε:

(i) Η σ είναι αυτοπαθής $\Leftrightarrow \Delta_E \subseteq \sigma$

(ii) Η σ είναι συμμετρική $\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

(iii) Η σ είναι αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$

(iv) Η σ είναι μεταβατική $\Leftrightarrow \sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

Απόδειξη:

(i) σ αυτοπαθής $\Leftrightarrow \forall x \in E \ \ x\sigma x \Leftrightarrow \forall x \in E \ (x,x) \in \sigma$
$\Leftrightarrow \{(x,x) \ x \in E\} \subseteq \sigma \Leftrightarrow \Delta_E \subseteq \sigma$

$\Rightarrow$ (ii) Έστω σ συμμετρική

$\forall x,y \in E \quad (x,y) \in \sigma$, σ συμμετρική $\Rightarrow (y,x) \in \sigma \Rightarrow (x,y) \in \sigma^{-1}$

$(x,y) \in \sigma^{-1} \Rightarrow (y,x) \in \sigma \overset{\text{συμ}}{\Rightarrow} (x,y) \in \sigma$

Άρα $\sigma \subseteq \sigma^{-1}$ κ' $\sigma^{-1} \subseteq \sigma \Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$.

$\Leftarrow$) Έστω $\sigma = \sigma^{-1}$.

$\forall x,y \in E \ (x\sigma y) \Rightarrow (x,y) \in \sigma \Rightarrow (y,x) \in \sigma \Rightarrow y\sigma x$

(iii) Υποθέτουμε σ αντισυμμετρική

$\Rightarrow$) $\begin{matrix} x,y \in E \\ (x,y)\, \sigma \cap \sigma^{-1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in \sigma \\ (x,y) \in \sigma^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in \sigma \\ (y,x) \in \sigma \end{cases} = \begin{cases} x\sigma y \\ y\sigma x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=y \\ (x,y) \in \Delta_E. \end{matrix}$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$

Για κάθε $x,y \in E$

$\begin{cases} x\sigma y \\ y\sigma x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in \sigma \\ (y,x) \in \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in \sigma \\ (x,y) \in \sigma^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1} \\ (x,y) \in \Delta_E \end{cases} \Rightarrow x=y$

(iv) $\Rightarrow$) σ μεταβατική

$(x,y) \in \sigma \circ \sigma \Leftrightarrow \exists z \in E$ ώστε $(x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \in \sigma$

$\Leftrightarrow \exists z \in E \quad x \sigma z \wedge z \sigma y$

$\underset{(\Longrightarrow)}{\sigma \text{ μεταβ.}} \quad x \sigma y \Rightarrow (x,y) \in \sigma$

Άρα $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$.

($\Leftarrow$) Υποθ. $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$

Έστω $x, y, z \in E$ ώστε $x \sigma y \wedge y \sigma z$

$\Rightarrow (x,y) \in \sigma \wedge (y,z) \in \sigma$.

$(x,z) \in \sigma \circ \sigma \Rightarrow x \sigma z$ άρα σ μεταβατική.

(2) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών ορίζουμε σχέση σ ως εξής:
$x \sigma y \Leftrightarrow x-y$ είναι άρτιος $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \; x-y=2k$].

Για $\forall x \in \mathbb{Z}$ $x-x=0=2\cdot 0$
άρα $x \sigma x$ με $0 \in \mathbb{Z}$, άρα η σ είναι αυτοπαθής.

(3) Υποθέτουμε ότι η σ είναι αντισυμμετρική.
Έστω $x,y \in E$ $(x,y) \in \sigma$

$(x,y) \in \sigma \cap \sigma^{-1}$
$\Leftrightarrow$ Υποθέτουμε ότι $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta E$
Για κάθε $x,y \in E$.

$$\left.\begin{array}{l} x\sigma y \\ y\sigma x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x,y)\in\sigma \\ (y,x)\in\sigma^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x,y)\in\sigma \\ (x,y)\in\sigma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\sigma y \Rightarrow x=y \\ y\sigma x \; (x,y)\in\Delta E. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (x,y) \in \Delta E \Rightarrow x=y$. Άρα η σ είναι αντισυμμετρική.

(4) Υποθέτουμε ότι η σ είναι μεταβατική.
$(x,y) \in \sigma \circ \sigma \Leftrightarrow \exists z \in E$ ώστε $(x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \in \sigma$
$\Leftrightarrow \exists z \in E \quad x \sigma z \wedge z \sigma y$
$\Rightarrow x \sigma y \Rightarrow (x,y) \in \sigma$
↑
σ μεταβατική.

$\Rightarrow$ Υποθέτουμε ότι $\sigma \circ \sigma \subseteq \sigma$
Έστω $x,y,z \in E$ ώστε $x \sigma y \wedge y \sigma z$
$\Rightarrow (x,y) \in \sigma \wedge (y,z) \in \sigma$.

Παραδείγματα

(3) Έστω $E = \{1, 2, 3, 4\}$ και $\sigma = \{(2,2), (2,3), \overset{(4,3)}{\cancel{(2,4)}}\}$

Η σ δεν είναι αυτοπαθής αφού $(4,4) \notin \sigma$

Η σ δεν είναι συμμετρική αφού $(2,3) \in \sigma$ ενώ $(3,2) \notin \sigma$

$\sigma \cap \sigma^{-1} = \{(2,2), (2,3), (4,3)\} \cap \{(2,2), (3,2), (3,4)\} = \{(2,2)\} \subseteq \Delta E$

άρα η σ είναι αντισυμμετρική

$\sigma \circ \sigma = \{(2,2), (2,3)\} \subseteq \sigma$ άρα η σ είναι μεταβατική.

(4) Μια σχέση ενδέχεται να είναι ταυτόχρονα συμμετρική και αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$ η $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta E \Leftrightarrow \sigma \subseteq \Delta E$.

Έτσι τέτοιες σχέσεις είναι τα υποσύνολα της διαγωνίου του Ε.

Πχ αν $E = \{\alpha, b, \gamma, \delta\}$ και $\sigma = \{(\alpha,\alpha), (\gamma,\gamma), (\delta,\delta)\}$ η σ είναι συμμετρική.